فرآیندهای تصادفی
زمزگ-بررسی چند کاربرد

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

پاکباختگی قمارباز

در هر مرحله یک واحد شرطبندی

- با احتمال p بردن یک واحد
- با احتمال $q = 1 - p$ باختن واحدی که قرار دادید.

آغاز با **i** واحد پول

ضریب سوگیری $\alpha = \frac{q}{p}$

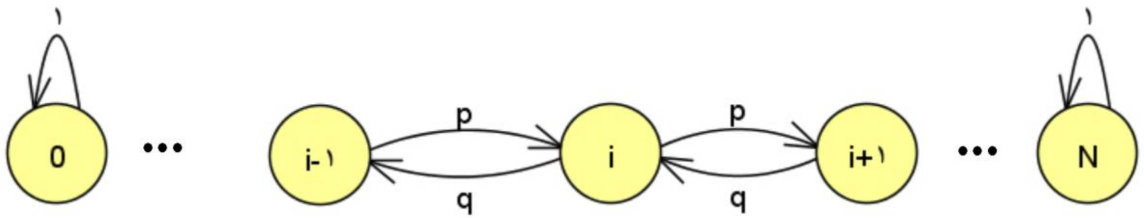
- $\alpha >$ ۱ باخت محتمل‌تر
- $\alpha <$ ۱ باب میل قمارباز
- $\alpha =$ ۱ بازی منصفانه

ادامهٔ بازی تا

- پاکباختگی
- دریافت کل مبلغ N واحد

سوال- احتمال رسیدن به تمامی مبلغ پیش از باخت تمام پول با شرط آغاز **i** واحد

پاکباختگی قمارباز- ادامه



مدل با زنجیره مارکوف

- $P_{i,i+۱} = p = ۱ - P_{i,i-۱}$
- $P_{NN} = P_{00} = ۱$

دارای سه رده $\{0\}$و $\{۱,۲, \dots ,N-۱\}$ و $\{N\}$

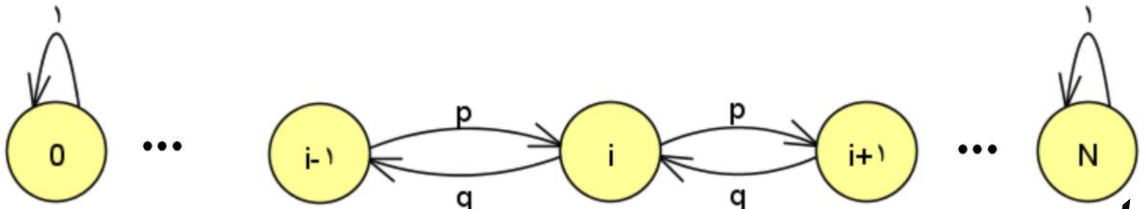
- $\{0\}$ و $\{N\}$ بازگشتی
- $\{۱,۲, \dots ,N-۱\}$ گذرا
  - به دلیل ملاقات متناهی، قمارباز نهایتا یا دستیابی به تمام پول یا ورشکست

آغاز با **i** واحد پول

- حالت‌های 0 و N حالت جذب
- مابقی «گذرا»

سوال- P_i احتمال شروع با مقدار **i** قمارباز نهایتا به N برسد

- احتمال رسیدن به تمامی مبلغ پیش از باخت تمام پول با شرط آغاز **i** واحد



پاکباختگی قمارباز- ادامه

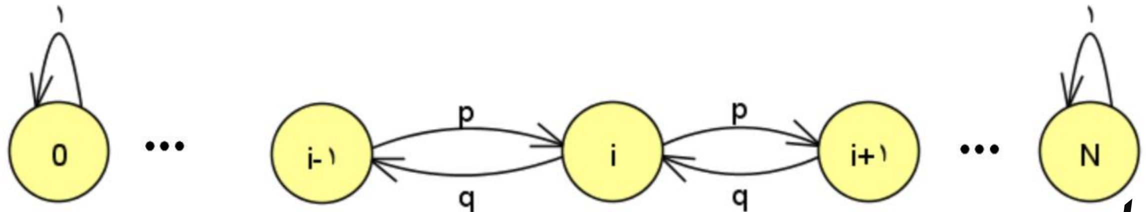
جهت مرتبط کردن P_i با همسایه‌هایش

$$P_i = P_{i,i+۱}P_{i+۱} + P_{i,i-۱}P_{i-۱} = pP_{i+۱} + qP_{i-۱}$$

$$p + q = 1 \Longrightarrow pP_i + qP_i = pP_{i+۱} + qP_{i-۱}$$

$$p(P_{i+۱} - P_i) = q(P_i - P_{i-۱})$$

$$\Longrightarrow P_{i+۱} - P_i = \alpha(P_i - P_{i-۱})$$



پاکباختگی قمارباز- ادامه

$$\Longrightarrow P_{i+1} - P_i = \alpha(P_i - P_{i-1}), \alpha = \frac{q}{p}$$

حال اگر حالت فعلی 0 آن‌گاه $P_i = P_0 = 0$

$$P_2 - P_1 = \alpha(P_1 - P_0) = \alpha P_1$$

استفاده از مقدار بدست آمده در مراحل بعد

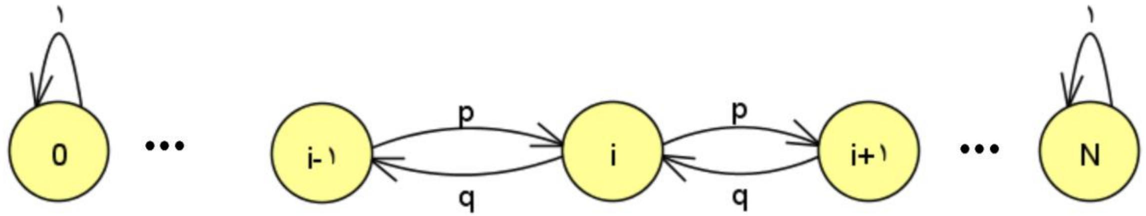
$$P_3 - P_2 = \alpha(P_2 - P_1) = \alpha^2 P_1$$

ادامهٔ پس‌روی بازگشتی از $P_i - P_{i-1}$

$$P_i - P_{i-1} = \alpha(P_{i-1} - P_{i-2}) = \alpha^{i-1} P_1$$

نتیجهٔ جمع تمامی این روابط

$$P_i - P_1 = P_1\left(\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{i-1}\right) \Longrightarrow P_i = P_1(1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{i-1})$$



پاکباختگی قمارباز- ادامه

$$P_i - P_1 = P_1\left(\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{i-1}\right) \Longrightarrow P_i = P_1(1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{i-1})$$

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^i}{1-\alpha} P_1, & \alpha \neq 1 \\ iP_1, & \alpha = 1 \end{cases}$$

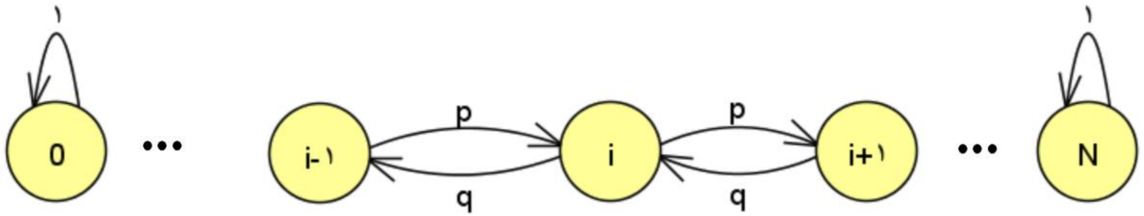
در حالت N: $P_N = ? = 1$

$$P_N = 1 = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} P_1 \Longrightarrow P_1 = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha^N}, & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{1}{N}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

جاگذاری P_1

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

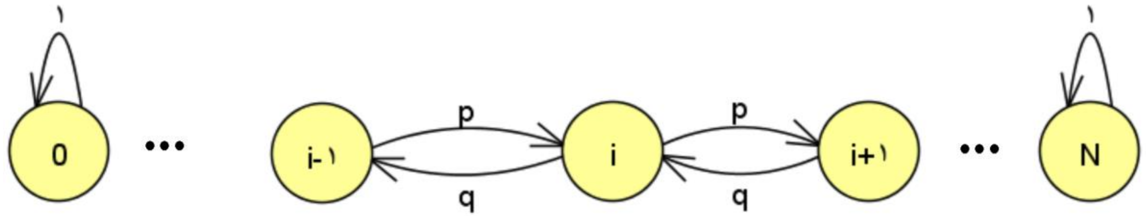
پاکباختگی قمارباز- ادامه



$$P_i = \begin{cases} \dfrac{۱-\alpha^i}{۱-\alpha^N}, & \alpha \neq ۱ \\ \dfrac{i}{N}, & \alpha = ۱ \end{cases}$$

یا

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{۱-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{۱-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & p \neq \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{i}{N}, & p = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$



پاکباختگی قمارباز- ادامه

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{۱ - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{۱ - \left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & p \neq \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{i}{N}, & p = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

- $N \to \infty$

$$P_i = \begin{cases} ۱ - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i, & p > \dfrac{۱}{۲} \\ 0, & p \leq \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

- $p > \frac{۱}{۲}$
  - احتمال مثبتی وجود دارد که سود قمارباز سود بی‌نهایت افزایش یابد
- $p \leq \frac{۱}{۲}$
  - با احتمال ۱، قمارباز $\Longleftarrow$ پاکباز
- میانگین زمان بازی؟

مثال عددی

اکبر و صغری

- صغری بازیکنی بهتر با احتمال ۰.۶ برندگی در هر دور
- الف- صغری با پنج تومن و اکبر با ده تومن شروع
    - احتمال برنده شدن صغری

$$\frac{۱-\left(\frac{q}{p}\right)^{i}}{۱-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}=\frac{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}}{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۵}}=۰.۸۷$$

- ب- صغری با ده تومن و اکبر با بیست تومن شروع
    - احتمال برنده شدن صغری

$$\frac{۱-\left(\frac{q}{p}\right)^{i}}{۱-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}=\frac{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۰}}{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳۰}}=۰.۹۸$$

آزمایش دارو

دو دارو جهت درمان یک بیماری

- میزان درمان $P_i, i = ۱ و ۲$
  - فرد با بیماری با امتحان داروی i با احتمال P_i درمان شود
- فرض P_i-ها نامشخص
  - به دنبال $P_۱ > P_۲$ و $P_۱ < P_۲$
- دنباله‌ای جفت آزمایش‌شونده‌ها
  - یکی از اعضای هر جفت داروی ۱ دیگری داروی ۲
  - ادامهٔ عملیات تا هنگامی که مجموع اعداد درمان یکی از دیگری بیشتر شود وقتی که دیگری به مقدار از پیش معین M برسد.
    - X_j
      - برابر ۱ وقتی داروی یک شخص مربوط را در جفت J درمان کند
      - برابر 0 در صورتی که درمان نکند
    - Y_j
      - برابر ۱ وقتی داروی دو شخص مربوط را در جفت J درمان کند
      - برابر 0 در صورتی که درمان نکند

آزمایش دارو

- X_j
  - برابر ۱ وقتی داروی یک شخص مربوط را در جفت J درمان کند
  - برابر 0 در صورتی که درمان نکند
- Y_j
  - برابر ۱ وقتی داروی دو شخص مربوط را در جفت J درمان کند
  - برابر 0 در صورتی که درمان نکند
- توقف آزمایش
  - $X_۱ + \cdots + X_n - (Y_۱ + \cdots + Y_n) = \mathrm{M}$
    - $P_۱ > P_۲$
  - یا
  - $X_۱ + \cdots + X_n - (Y_۱ + \cdots + Y_n) = -\mathrm{M}$
    - $P_۱ < P_۲$

آزمایش دارو

- به دنبال ارزیابی درستی آزمایش
  - در هر محله یا مقدار اختلاف
    - یک واحد افزایش می‌یابد با احتمال
      - $P_۱(۱-P_۲)$
    - یک واحد کاهش می‌یابد با احتمال
      - $P_۲(۱-P_۱)$
    - بی‌تغییر می‌ماند با احتمال
      - $P_۱P_۲+(۱-P_۱)\,(۱-P_۲)$
- معقول است که صرفا به دنبال انهایی که تغییر می‌دهند
  - احتمال اینکه اختلاف یک واحد افزایش یابد

$$p=P\left\{\uparrow \middle| \uparrow \text{ یا } \downarrow\right\}=\frac{P_۱(۱-P_۲)}{P_۱(۱-P_۲)\ +P_۲(۱-P_۱)}$$

  - احتمال اینکه اختلاف یک واحد کاهش یابد

$$q=۱-p=P\left\{\downarrow \middle| \uparrow \text{ یا } \downarrow\right\}=\frac{P_۲(۱-P_۱)}{P_۱(۱-P_۲)\ +P_۲(۱-P_۱)}$$

آزمایش دارو

- احتمال اینکه اختلاف یک واحد افزایش یابد

$$p = P\left\{\uparrow \middle| \uparrow \text{ یا } \downarrow\right\} = \frac{P_۱(۱-P_۲)}{P_۱(۱-P_۲)\ + P_۲(۱-P_۱)}$$

- احتمال اینکه اختلاف یک واحد کاهش یابد

$$q = ۱ - p = P\left\{\downarrow \middle| \uparrow \text{ یا } \downarrow\right\} = \frac{P_۲(۱-P_۱)}{P_۱(۱-P_۲)\ + P_۲(۱-P_۱)}$$

- $P_۱ < P_۲$
- احتمال برنده شدن قمارباز در هر مرحله احتمال p
- دور شدن از M قبل از رفتن به سمت آن
- i=M و N=2M

$$P(P_۱ < P_۲) = ۱ - \frac{۱ - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{۱ - \left(\frac{q}{p}\right)^{۲M}} = \frac{۱}{۱ + \left(\frac{p}{q}\right)^M}$$

- مثال $P_۱ = ۰.۶$ و $P_۲ = ۰.۴$
  - احتمال تصمیم غلط ۰,۰۱۷ با M=5
  - احتمال تصمیم غلط ۰,۰۰۰۳ با M=10

رتبه‌بندی صفحات وب

بازیابی صفحات وب مبنی بر جستجوی کاربر

- جستجوی موتورها ابتدا شبیه جستجو در پردازشگرهای متنی جهت یافتن تمامی صفحات دارای کلمهٔ جستجو
- محتملا یافتن حجم عظیمی از صفحات

کار بعدی؟

- کاهش فهرست صفحات وب با استفاده از عیارهای رتبه‌بندی صفحات

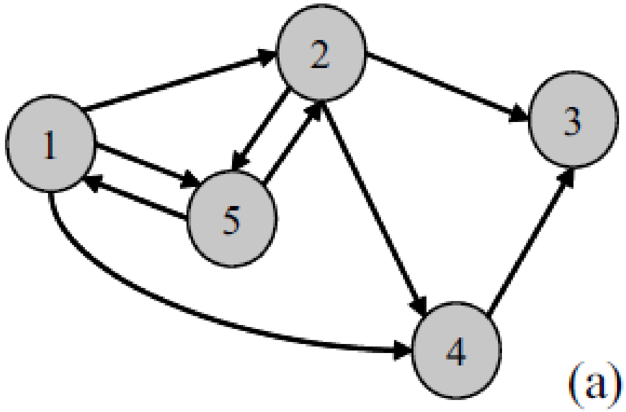
گوگل

- رتبهٔ صفحه
- مبنی بر ابرپیوند یا پیوند

مدل مارکوفی وب

صورت بندی تارمانه‌ها با گراف جهت‌دار

- گرافی با N رأس
- هر رأس نمایشگر یک صفحهٔ وب خاص
- یال‌های جهت‌دار نمایشگر پیوندها



(a)

$$P=\begin{bmatrix} 0 & P_{12} & 0 & P_{14} & P_{15} \\ 0 & 0 & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{43} & 0 & 0 \\ P_{51} & P_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مدل مارکوفی وب

گرافی با N رأس
- هر رأس نمایشگر یک صفحهٔ وب خاص
- یال‌های جهت‌دار نمایشگر پیوندها

عیار ارزیابی اهمیت صفحه؟
- تعداد دفعات بازدید صفحه

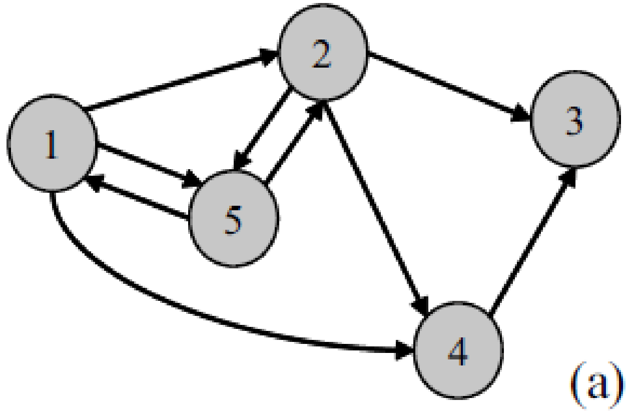
p_{ij}
- احتمال انتقال با حرکت از i به j
  - هر صفحه معادل یک حالت

$s_i(k)$ بازدید صفحه i در زمان k

π_i نسبت بلند مدت بازدید صفحهٔ i
- معیار اندازهٔ رتبه اهمیت صفحه i نزد گوگل

آسان اما محاسبات احتمال انتقال و حالت پایدار چگونه است؟
- خاصه با وجود میلیاردها صفحه

مدل مارکوفی وب



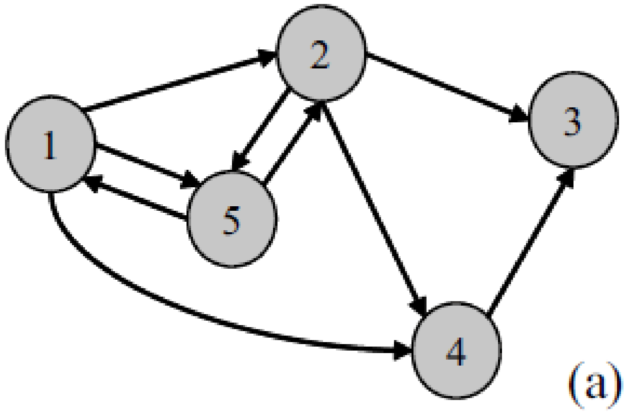
(a)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p_{ij}

- با فرض بودن در صفحه i
- هر پیوندی دارای احتمال یکسان جهت کلیک
  - d_i درجهٔ رأس i [؟]
  - آنگاه $p_{ij} = \frac{۱}{d_i}$
  - فرض یکنواختی بهترین روش وقتی که اطلاع زیادی نداشته باشیم
  - در صورت دانستن اینکه با بودن در صفحه ۲ دستیابی به صفحهٔ ۴ دو برابر محتملتر از صفحه‌ها
    - $[0 \quad 0 \quad \frac{۱}{۴} \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۴}]$
- مسئله
  - راس ۳ بدون خروجی پس جمع ردیف متناظر معادل صفر
    - خلاف ماتریس تصادفی
  - ؟

مدل مارکوفی وب



(a)

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- مسئله
  - راس ۳ بدون خروجی پس جمع ردیف متناظر معادل صفر
    - خلاف ماتریس تصادفی
  - یک راه مقدار یکسان به همه ستون‌ها
- مسئله
  - این تطبیق ناکافی جهت اطمینان از وجود بردار مقادیر نهائی π
  - نیاز به اطمینان به کاهش‌ناپذیری
  - راه‌حل برین و پیج

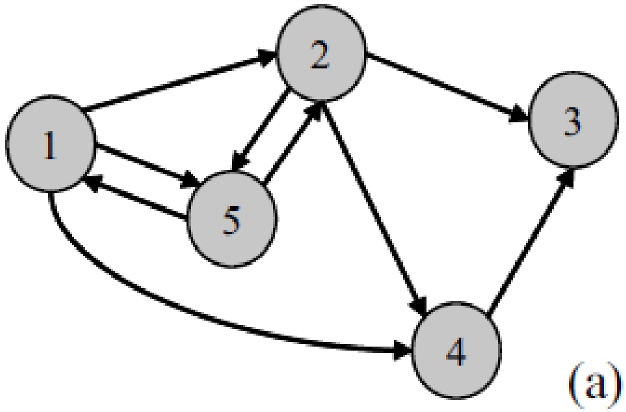
$$\bar{\bar{P}} = \alpha\bar{P} + (۱-\alpha)\,\frac{\underline{۱}.\underline{۱}^T}{N}$$

  - اطمینان از ماتریس تصادفی کاهش‌ناپذیر
  - هر راس متصل به راس دیگر
    - کاهش‌ناپذیری، بازگشت مثبت، غیرمتناوب‌بودن زنجیره مارکوف
    - استفاده از $\underline{۱}.\boldsymbol{v}^T$ به جای $\underline{۱}.\underline{۱}^T$
    - $\boldsymbol{v}$ بردار احتمال با اعضای غیرصفر

$$\bar{\bar{P}} = \alpha\bar{P} + (۱-\alpha)\underline{۱}.\boldsymbol{v}^T$$

مدل مارکوفی وب

- $\alpha = \frac{۴}{۵}$ و
- $\boldsymbol{v}^T = [\frac{۱}{۱۶} \quad \frac{۴}{۱۶} \quad \frac{۶}{۱۶} \quad \frac{۴}{۱۶} \quad \frac{۱}{۱۶}]$



(a)

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{80} & \frac{19}{60} & \frac{3}{40} & \frac{19}{60} & \frac{67}{240} \\ \frac{1}{80} & \frac{1}{20} & \frac{41}{120} & \frac{19}{60} & \frac{67}{240} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{80} & \frac{1}{20} & \frac{7}{8} & \frac{1}{20} & \frac{1}{80} \\ \frac{33}{80} & \frac{9}{20} & \frac{3}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

مدل مارکوفی وب

- تبدیل ماتریس تنک P به ماتریس چگال $\bar{\bar{P}}$
- مسئله
  - با N صفحه وبی افزایش فضای ذخیره لازم
- تعریف بردار $\boldsymbol{r}$ به طوری که $r_j = ۱$ اگر ردیف j برابر صفر
- آن‌گاه $\bar{P} = P + \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}^T$
  - تعریف رتبه یک از ماتریس P در نتیجه

$$\bar{\bar{P}} = \alpha\left(P + \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}^T\right) + (۱ - \alpha)\underline{۱}.\boldsymbol{v}^T = \alpha P + (\alpha \boldsymbol{r} + (۱ - \alpha)\underline{۱})\boldsymbol{v}^T$$

محاسبهٔ بردار حالت پایدار رتبه‌صفحه

توزیع حدی (حالت پایدار)

- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_N)^T$

توزیع حدی پاسخ منحصربفرد

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\bar{\bar{P}}, \qquad \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{1} = 1$$

برین و پیج به جای پاسخ مستقیم محاسبه استفاده از $\boldsymbol{\pi} = \mathop{\text{حد}}_{n\to\infty} s[n]$

- $s[0] = \frac{\underline{۱}^T}{N}$
- $s[n+۱] = s[n]\bar{\bar{P}}$
- $s[n] = s[0]\bar{\bar{P}}^n$
  - تکرار به اندازهٔ کافی بزرگ تا مقدار به مقدار واقع نزدیک‌تر شود.

$$s[n+۱] = s[n]\bar{\bar{P}} = s[n]\Big(\alpha P + \big(\alpha \mathbf{r} + (۱-\alpha)\underline{۱}\big)\mathbf{v}^T\Big)$$

- $s[n]\underline{۱} = ۱$

$$s[n+۱] = \alpha s[n]P + \big(\alpha s[n]\mathbf{r} + (۱-\alpha)\big)\mathbf{v}^T$$

محاسبهٔ بردار حالت پایدار رتبه‌صفحه

$$s[n+۱] = \alpha s[n]P + \big(\alpha s[n]\boldsymbol{r} + (۱-\alpha)\big)\boldsymbol{v}^T$$

$\Longleftarrow$ صرفا نیاز به ماتریس تنک P و عدم نیاز به استفاده و ذخیرهٔ $\bar{P}$ و $\bar{\bar{P}}$

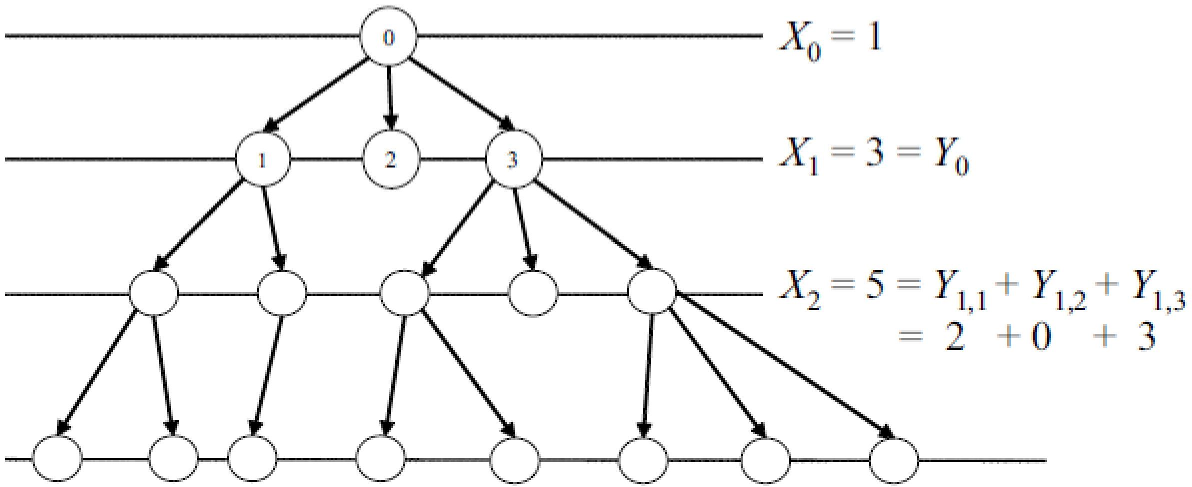
سرعت همگرایی زنجیره مارکوف به توزیع حدی مطابق با دومین مقدارویژه بزرگ

پنجاه تا صد تکرار کافی است!

ایرادها

- برای تقسیم یک بر N و راه‌حل‌های بعدی
- منجر به راه‌حل‌های بعدی
  - استفاده از رأس نخودی!

فرایندهای شاخه‌زنی



Piet Van Mieghem, 2006

- کاربرد در زیست‌شناسی و جامعه‌شناسی و مهندسی
  - نام خانوادگی

جمعیتی از افراد قادر به ایجاد اولاد

هر فرد در پایان عمرش $j \geq 0$ اولاد با احتمال P_j

- مستقل از دیگران
- X_0 تعداد نسل صفر و تمامی فرزندان نسل صفر برابر نسل یک و به همین ترتیب
- X_n تعداد نسل **n**-اُم

$$X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} Y_{n,j}$$

- زنجیره مارکوف با حالت‌هائی از اعداد صحیح نامنفی [؟]
- حالت 0 بازگشتی $P_{00} = 1$
- $P_{i0} = P_0^i$
  - با شروع از **i** احتمال مثبتی برای نبودن نسل

فرایندهای شاخه‌زنی

$$P(X_{n+۱} = x_{n+۱}|X_n = x_n, X_{n-۱} = x_{n-۱}, , \dots, X_0 = x_0)$$
$$= P(X_{n+۱} = x_{n+۱}|X_n = x_n) \; = P\left(\sum_{j=۱}^{X_n} Y_{n,j} = x_{n+۱}\right) =$$
$$P(x_n \mu = x_{n+۱})$$

- پس فرایندی زنجیره مارکوفی با احتمال انتقال
  - $P_{ij} = P[i\mu = j]$
- محاسبهٔ امید ریاضی

$$E[X_{n+۱}] = E\left[\sum_{j=۱}^{X_n} Y_{n,j}\right] = E[X_n \mu] = \mu E[X_n]$$

- با شروع از نسل صفر

$$E[X_n] = \mu^n E[X_0]$$

با فرض مقدار $X_0 = ۱$ و در نتیجه $E[X_0] = ۱$، آن‌گاه

$$E[X_n] = \mu^n$$

فرایندهای شاخه‌زنی

- محاسبهٔ وردائی

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E\big[Var[X|Y]\big] + Var[E[X|Y]] \\
Var[X_n] &= E\big[Var[X_n|X_{n-1}]\big] + Var[E[X_n|X_{n-1}]] \\
&= E\big[\sigma^2 X_{n-1}\big] + Var[\mu X_{n-1}] \\
&= \sigma^2 \mu^{n-1} + \mu^2 Var[X_{n-1}] \\
&= \sigma^2 \mu^{n-1} + \mu^2\big(\sigma^2 \mu^{n-2} + \mu^2 Var[X_{n-2}]\big) \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n) + \mu^4 Var[X_{n-2}] \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n) + \mu^4\big(\sigma^2 \mu^{n-3} + \mu^2 Var[X_{n-3}]\big) \\
&= \sigma^2\big(\mu^{n-1} + \mu^n + \mu^{n+1}\big) + \mu^6 Var[X_{n-3}] \\
&= \cdots \\
&= \sigma^2\big(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}\big) + \mu^{2n} Var[X_0] \\
&= \sigma^2\big(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}\big)
\end{aligned}
$$

$$
Var[X_n] = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases}
$$

فرایندهای شاخه‌زنی

- احتمال انقراض؟

$$\pi_0 = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P\{X_n = 0 | X_0 = ۱\}$$

داریم

$$\mu^n = E[X_n] = \sum_{j=۱}^{\infty} jP\{X_n = j\} \geq \sum_{j=۱}^{\infty} ۱ \times P\{X_n = j\} = P\{X_n \geq ۱\}$$

$$\mu < 1: \mu^n \to 0 \Longrightarrow P\{X_n \geq ۱\} \to 0 \Longrightarrow P\{X_n = 0\} \to ۱$$

$$\mu < 1: \mu^n \to 0 \Longrightarrow \pi_0 < ۱$$

زنجیره مارکوف زمان برگشت‌پذیر

زنجیره مارکوف ارگودیک ایستا

- زم ارگودیکی که مدت زمان طولانی در حال اجرا بوده است

برعکس رفتن نیز زنجیره مارکوف است با احتمالات انتقال Q_{ij}

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= P\{X_m = j | X_{m+1} = i\} \\ &= \frac{P\{X_m = j, X_{m+1} = i\}}{P\{X_{m+1} = i\}} \\ &= \frac{P\{X_m = j\} P\{X_{m+1} = i | X_m = j\}}{P\{X_{m+1} = i\}} \\ &= \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i} \end{aligned}$$

$$P\{X_m = j | X_{m+1} = i, X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots\} = P\{X_m = j | X_{m+1} = i\}$$

در صورت $Q_{ij} = P_{ij}$

- زمان برگشت‌پذیر یا
- $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$

مثال

ولگشت با حالت‌های 0 تا M و احتمال انتقال‌های

$$P_{i,i+1} = \alpha_i = 1 - P_{i,i-1}, \quad i = 1, \ldots, M-1$$
$$P_{0,1} = \alpha_0 = 1 - P_{0,0},$$
$$P_{M,M} = \alpha_M = 1 - P_{M,M-1}$$

$$\pi_0\alpha_0 = \pi_1(1-\alpha_1),$$
$$\pi_1\alpha_1 = \pi_2(1-\alpha_2),$$
$$\vdots$$
$$\pi_i\alpha_i = \pi_{i+1}(1-\alpha_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\pi_1 = \frac{\alpha_1\alpha_0}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_1)}\pi_0$$

$$\pi_i = \frac{\alpha_{i-1}\cdots\alpha_0}{(1-\alpha_i)\cdots(1-\alpha_1)}\pi_0, \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

$$\sum_0^M \pi_i = 1,$$

$$\pi_0\left[1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_{j-1}\cdots\alpha_0}{(1-\alpha_j)\cdots(1-\alpha_1)}\right] = 1$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_{j-1}\cdots\alpha_0}{(1-\alpha_j)\cdots(1-\alpha_1)}\right]^{-1}$$

$$\pi_i = \frac{\alpha_{i-1}\cdots\alpha_0}{(1-\alpha_i)\cdots(1-\alpha_1)}\pi_0, \quad i = 1, \ldots, M$$

$$\alpha_i \equiv \alpha,$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j\right]^{-1}$$
$$= \frac{1-\beta}{1-\beta^{M+1}}$$

$$\pi_i = \frac{\beta^i(1-\beta)}{1-\beta^{M+1}}, \quad i = 0, 1, \ldots, M$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

آب‌وهوا: بارانی، ابری، آفتابی

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰.۳ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۶ & ۰.۲ \\ ۰.۱ & ۰.۱ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

- حالت ۱: بارانی
- حالت ۲: ابری
- حالت ۳: آفتابی

پرسش: احتمال دنبالۀ وضعیت آب و هوا با فرض آغاز از آفتابی بودن امروز در هفت روز متوالی بعدی چیست؟ فرض امروزآفتابی است.

- آفتابی، آفتابی، بارانی، بارانی، آفتابی، ابری، آفتابی، یا O=(3,3,3,1,1,3,2,3)

$$P\left(O \middle| \text{مدل}\right) = P(3,3,3,1,1,3,2,3) = P(X_1 = 3)P(3|3)P(3|3)P(1|3)P(1|1)P(3|1)P(2|3)P(3|2)$$

$$= \pi_3 p_{33} p_{33} p_{31}\ p_{11}\ p_{13}\ p_{32}\ p_{23}$$

$$= 1 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.1 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.2 = 1.535 \times 10^{-4}$$

آب‌وهوا: بارانی، ابری، آفتابی

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰.۳ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۶ & ۰.۲ \\ ۰.۱ & ۰.۱ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

- حالت ۱: بارانی
- حالت ۲: ابری
- حالت ۳: آفتابی

پرسش ۲: احتمال ادامه وضعیت فعلی در پنج روز چقدر است؟ فرض امروز آفتابی است.

- آفتابی، آفتابی، بارانی، بارانی، آفتابی، ابری، آفتابی، یا $O = (3,3,3,3, \neq 3)$

$$P\left(O\middle|\text{مدل}, X_0 = 3\right) = P(3,3,3,3, \neq 3) = P(3|3)^4\left(1 - P(3|3)\right)$$

- *حالت کلی برای m روز در یک وضعیت*

$$P\left(O\middle|\text{مدل}, X_0 = i\right) = p_{ii}^{m-1}(1 - p_{ii}) = p_i(m)$$

آب‌وهوا: بارانی، ابری، آفتابی

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰.۳ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۶ & ۰.۲ \\ ۰.۱ & ۰.۱ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

- حالت ۱: بارانی
- حالت ۲: ابری
- حالت ۳: آفتابی

پرسش ۳: میانگین احتمال $p_i(m)$ (ماندن در حالت خاص i) چقدر است؟

$$\overline{m_i} = \sum_{m=0}^{\infty} m p_i(m) = \sum_{m=0}^{\infty} m p_{ii}^{m-1}(1 - p_{ii}) = \frac{1}{1 - p_{ii}}$$

آب‌وهوا: بارانی، ابری، آفتابی

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰.۳ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۶ & ۰.۲ \\ ۰.۱ & ۰.۱ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

- حالت ۱: بارانی
- حالت ۲: ابری
- حالت ۳: آفتابی

پرسش ۳: میانگین احتمال $p_۲(m)$ (ماندن در حالت خاص ۲) چقدر است؟

گام به مارکوف پنهان

شیر یا خط آمدن سکه

- تک‌سکه
- دو سکه
- سه سکه

گلدان‌های دارای توپ‌های رنگی

کلیات مدل‌های مارکوفی مخفی

تدوین HMM:

- N تعداد حالت‌های مدل
  - مخفی
  - دارای خصلت مارکوفی
- M تعداد مشاهدات مجزا به ازای هر حالت
  - خروجی احتمالی هر حالت
- تابع انتقال حالت p_{ij}
- توزیع احتمال مشاهده k در حالت j
  - $b_j(k) = P(O_n = k|X_n = j)$
- توزیع احتمال حالت آغازین
  - $\pi_j = P[X_1 = i], 1 \leq i \leq \mathrm{N}$

با مشاهدهٔ $O = O_1 O_2 \cdots O_T$

کلیات مدل‌های مارکوفی مخفی

رویه تولید دنباله مشاهده‌ها

- آغاز حالت اولیه **i**-اُم بر اساس توزیع آغازین $\boldsymbol{\pi}$
- t=1
- انتخاب $O_t = o_k$ بر اساس توزیع احتمال مشاهدات از حالت i
- انتقال به حالت جدید j در زمان بعدی بر اسا حالت فعلی و تابع انتقال حالت p_{ij}
- افزایش زمان و ادامه دو مرحله بالا تا زمان T

کلیات مدل‌های مارکوفی مخفی

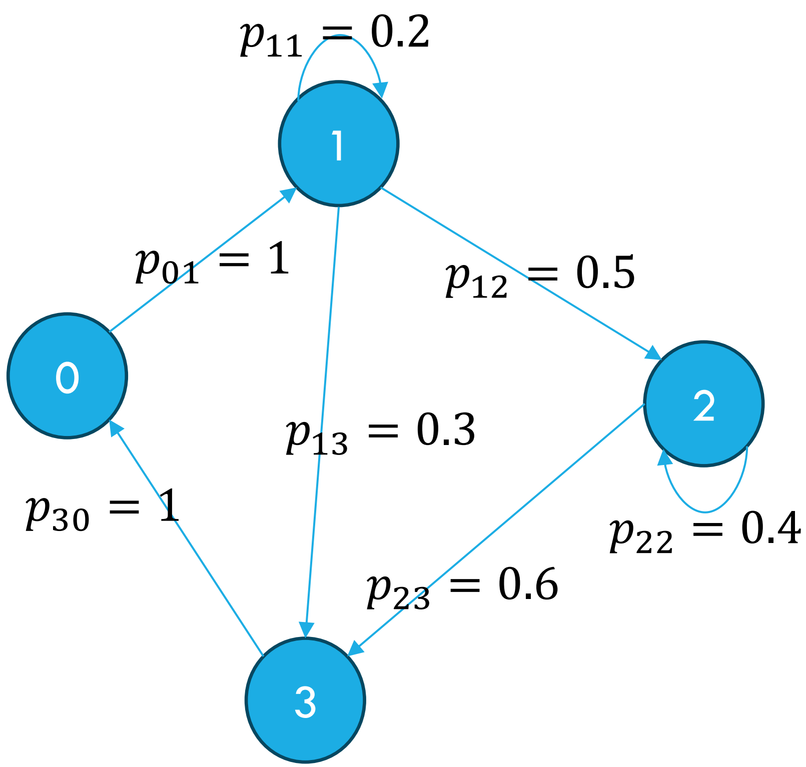
- تدوین با $\lambda = (P,B,\boldsymbol{\pi})$

مسائل بنیادی ممم

۱- با مشاهدهٔ $O = O_1 O_2 \cdots O_T$ و مدل $\lambda = (P, B, \boldsymbol{\pi})$، احتمال مشاهده دنباله مشاهده شده چقدر است؟

۲- با مشاهدهٔ $O = O_1 O_2 \cdots O_T$ و مدل $\lambda = (P, B, \boldsymbol{\pi})$، چگونه دنبالهٔ حالت‌ها را تعیین کنیم؟ بهترین تفسیر مشاهدات

۳- مدل $\lambda = (P, B, \boldsymbol{\pi})$ را چگونه بدست آوریم که که $P(O|\lambda)$ بیشینه شود؟

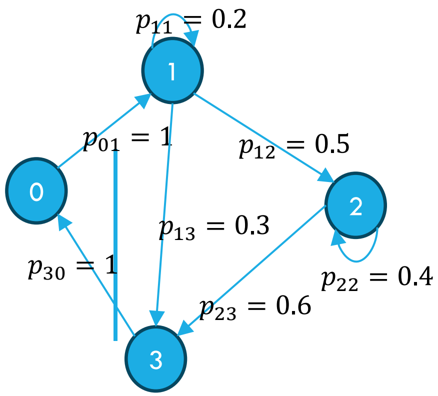


b_i(سبز)	b_i(سفید)	b_i(سرخ)	حالت i
0,5	0.2	0.3	0
0.1	0.2	0.7	1
0.1	0	0.9	2
0	0.8	0.2	3

$$O: Sorq, Sabz, Spid, spid, sorq, sabz, sorq$$
$$S: ?$$

$$P(O) = ?$$

الگوریتم پیش‌رو-پس



حالت i	b_i(سرخ)	b_i(سفید)	b_i(سبز)
0	0.3	0.2	0,5
1	0.7	0.2	0.1
2	0.9	0	0.1
3	0.2	0.8	0

$$O: Sorq, Sabz, Spid, spid, sorq, sabz, sorq$$
$$S: ?$$

$$\pi_0 = 1,$$
$$\pi_i = 0, i \neq 0$$
$$P(O) = ?$$

زمان صفر

$$\alpha_0(i) = \pi_i b_i(O_0), 0 \leq i \leq N-1?$$

زمان t و $t \in \{1,2,\ldots,T-2\}$ و $0 \leq j \leq N-1$

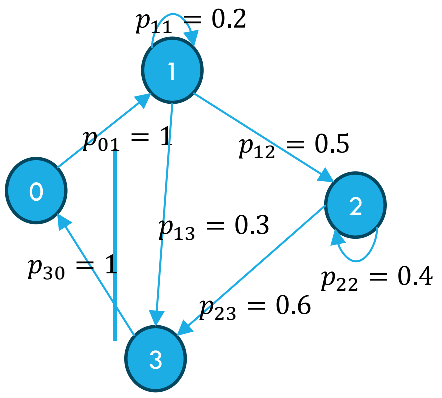
$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_t(i) p_{ij}\right] b_j(O_{t+1})$$

خروجی

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{T-1}(i)$$

$\alpha_t(j)$

$t \backslash j$	0	1	2	3
0	0.3	0	0	0
1	0	0.03	0	0
2	0	1.2E-2	0	7.2E-3
3	1.44E-3	4.8E-5	0	2.88E-4
4	8.64E-5	1.0147E-3	2.16E-5	2.88E-6
5	1.44E-6	2.8934E-5	5.15E-5	0
6	0	5.0588E-6	3.1596E-5	7.9281E-6



الگوریتم ویتربی

حالت i	b_i(سرخ)	b_i(سفید)	b_i(سبز)
0	0.3	0.2	0,5
1	0.7	0.2	0.1
2	0.9	0	0.1
3	0.2	0.8	0

$$O: Sorq, Sabz, Spid, spid, sorq, sabz, sorq$$
$$S: ?$$

$\pi_0 = 1,$

$\pi_i = 0, i \neq 0$

به دنبال توالی بیشینه‌ساز

زمان صفر

$$\delta_0(i) = \pi_i b_i(O_0), 0 \le i \le N-1$$
$$\Psi_1(i) = 0$$

زمان t و $t \in \{1,1,2,\ldots,T-1\}$ و $0 \le j \le N-1$

$$\delta_t(j) = \max_{0 \le i \le N-1} \left[\delta_{t-1}(i) p_{ij}\right] b_j(O_t)$$
$$\Psi_t(j) = \underset{0 \le i \le N-1}{argmax}\left[\delta_{t-1}(i) p_{ij}\right]$$

پایان

$$P_{max} = \max_{0 \le i \le N-1} [\delta_{T-1}(i)]$$
$$i_{T-1} = \underset{0 \le i \le N-1}{argmax}[\delta_{T-1}(i)]$$

منابع

[پینسکی]

[فن‌میگم]

[راس]

[زانلا]

[متئوس]

[ریبیرو]